М. М. Кокурин

Марийский государственный университет,

kokurin@nextmail.ru

ОБ АПОСТЕРИОРНОМ СПОСОБЕ ВЫБОРА ШАГА ДИСКРЕТИЗАЦИИ В РАЗНОСТНЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Изучается некорректная задача Коши

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \in [0,T], \quad x(0) = f \in D(A). \tag{1}$$

Здесь $A : D(A) \subset X \to X$ – замкнутый неограниченный секториальный оператор с углом секториальности $\varphi_0 < \pi/2$ в банаховом пространстве X, $\overline{D(A)} = X$. Предполагается существование классического решения $x(t)$, $x : [0,T] \to X$ задачи (1). Пусть, кроме того, это решение допускает продолжение на некоторый больший отрезок $[0,T_1]$, $T_1 > T$. Для аппроксимации решения задачи (1) будем использовать разностные схемы вида

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{n+j}^N = \Delta t \sum_{j=0}^{k} \beta_j A x_{n+j}^N, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-k, \quad x_0^N = f. \tag{2}$$

Здесь $\Delta t = T/N$ – шаг дискретизации, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant j \leqslant k$ – фиксированные параметры. При указании правила выбора элементов $x_1^N, \ldots, x_{k-1}^N$ схема (2) позволяет найти приближения x_n^N, $k \leqslant n \leqslant N$ к значениям $x(n\Delta t)$ искомой функции $x(t)$ в узлах дискретизации.

Класс $R1$ разностных схем описывается параметрами $k = 1$, $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_0 = 1 - \beta_1$, $\beta_1 < 0$. Класс $R2$ определяется значением $k = 2$, условиями на коэффициенты

$\alpha_0 = -2\gamma_1 + 3$, $\alpha_1 = 2\gamma_1 - 4$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_0 = \gamma_2 - 2$, $\beta_1 = 3\gamma_1 - 2\gamma_2$, $\beta_2 = \gamma_2 - \gamma_1$, $\gamma_1 \in (1,2]$, $\gamma_2 < \gamma_1$ и выбором $x_1^N = (E + 2\Delta t A)(E + \Delta t A)^{-1} f$ (см. [1]).

Пусть вместо точного элемента f в схеме (2) используется приближённый элемент f_δ, $\|f - f_\delta\| < \delta$. Количество N отрезков дробления будем выбирать по апостериорному правилу

$$\|U_{-A}(T)x_N^N - f_\delta\| \leqslant b \ln^{-q+\varepsilon}(1/\delta) < \|U_{-A}(T)x_n^n - f_\delta\|, \quad 2 \leqslant n \leqslant N-1, \tag{3}$$

с заранее выбранными константой $b > 0$ и малым параметром $\varepsilon > 0$. Здесь $q = 1$ для схем класса $R1$ и $q = 2$ для схем класса $R2$; $U_{-A}(t)$, $t \geqslant 0$ есть порождённая оператором $-A$ полугруппа; x_n^n есть приближение к значению $x(T)$ искомой функции в последнем узле дискретизации $t = T$ при дроблении отрезка $[0, T]$ на n отрезков.

Теорема. *Разностные схемы классов $R1$, $R2$ с апостериорным выбором* (3) *дают регуляризующие алгоритмы для задачи* (1), *причём для них справедлива оценка погрешности*

$$\|x_N - x(T)\| \leqslant C \ln^{(-q+\varepsilon)(T_1 - T)/T_1}(1/\delta), \quad C = \text{const}.$$

Теорема с некоторыми дополнительными условиями допускает распространение на схемы общего вида (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00239a).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кокурин М. М. *Об оптимизации оценок скорости сходимости некоторых классов разностных схем решения некорректной задачи Коши* // Вычислительные методы и программирование. – 2013. – Т. 14. – С. 58–76.